Corrigé de l'examen de mathématiques (UE1-EC1.3)

Exercice 1 (5 points)

1. a. 23 unités et sept centièmes = $23 + \frac{7}{100} = 23{,}07$

b. 124 dixièmes et 7 millièmes = $\frac{124}{10} + \frac{7}{1000} = 12 + \frac{4}{10} + \frac{7}{1000} = 12{,}407$

c. 12 centièmes et 48 millièmes = $\frac{12}{100}+\frac{48}{1000} = \frac{12}{100}+\frac{4}{100}+\frac{8}{1000} = \frac{16}{100}+\frac{8}{1000} = 0{,}168$

d. 5 centaines 13 millièmes et 24 dixièmes = $500 + \frac{13}{1000}+\frac{24}{10} = 500 + 2+\frac{4}{10}+\frac{1}{100}+\frac{3}{1000}$ $= 502{,}413$

2. A = $\frac{25}{8} = \frac{25}{2^3}$. Cette fraction est irréductible et son dénominateur s'écrit sous la forme d'une puissance de 2. Elle représente donc un nombre décimal.

On aurait pu aussi écrire A sous la forme d'une fraction décimale : $A = \frac{25}{8} = \frac{25}{2^3} = \frac{25\times 5^3}{2^3\times 5^3} = \frac{3\,125}{10^3}$.

On aurait pu encore écrire : A = 3,125. L'écriture décimale de ce nombre est finie. A est donc un nombre décimal.

B = $\frac{1}{7}$. Cette fraction est irréductible et son dénominateur ne s'écrit pas sous la forme d'un produit de puissance de 2 et de puissance de 5. Elle ne représente donc pas un nombre décimal.

C = $\frac{15}{3} = 5$. 5 est un nombre entier naturel et c'est donc un nombre décimal puisque tous les nombres entiers sont décimaux.

D $= 3\times 10^4 + 5\times 10^2 + 7 + 4\times 10^{-2} + 2\times 10^{-5}$ = 30 000 + 500 + 7 + 0,04 + 0,00002 = 30507,04002.
Ce nombre est un nombre décimal.
On aurait pu aussi dire que D est la somme de nombres décimaux puisque chaque terme de cette somme est le produit d'un entier par une puissance de 10.

3. 5,205 est un nombre décimal compris entre 5,204 et 5,21.
Il y a une infinité de solutions puisque les nombres suivants : 5,205 ; 5,206 ; 5,207 ; 5,208 ; 5,209 sont compris entre 5,204 et 5,21. On peut également écrire des nombres ayant quatre, ou plus, chiffres après la virgule : 5,2041 ; 5,204008 ; etc.
5,204204204…..où 204 est la période est un nombre non décimal compris entre 5,204 et 5,21. Le nombre donné doit être compris entre 5,204 et 5,21 et avoir une écriture infinie périodique. Autre exemple : 5,20411…, où les 1 se répètent à l'infini.

4. A = $\frac{3}{4}+\frac{7}{2}-\frac{5}{8} = \frac{6}{8}+\frac{28}{8}-\frac{5}{8} = \frac{29}{8}$

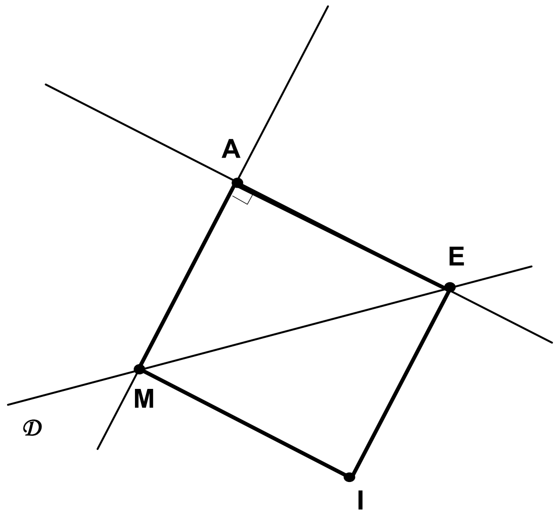
B = $\frac{5}{3}-\frac{5}{4}+\frac{5}{6} = \frac{20}{12}-\frac{15}{12}+\frac{10}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$

5. a. La somme de deux fractions décimales est toujours une fraction décimale. Une fraction décimale a pour dénominateur une puissance de 10. Si $A=\frac{m}{10^n}$ et si $B=\frac{p}{10^r}$ alors $A + B=\frac{m}{10^n}+\frac{p}{10^r}$.

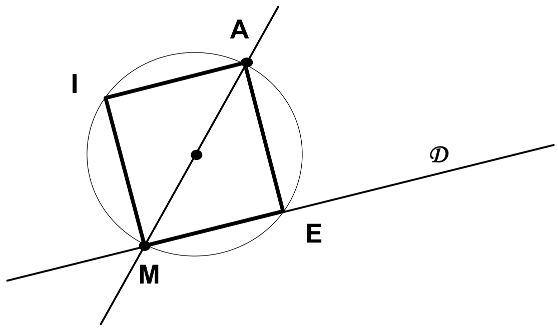
Supposons que n>r alors, $A + B = \frac{m}{10^n}+\frac{p\text{x}10^{n-r}}{10^n} = \frac{m+p\text{x}10^{n-r}}{10^n}$. Cette fraction est une fraction décimale.

b. La somme de deux fractions, chacune non décimale, peut être une fraction décimale :
$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$ ne sont pas des fractions décimales et pourtant leur somme $\frac{1}{2}$ est une fraction décimale. En effet $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$, ou $\frac{1}{2}= 0{,}5$.

Exercice 2 (4 points)

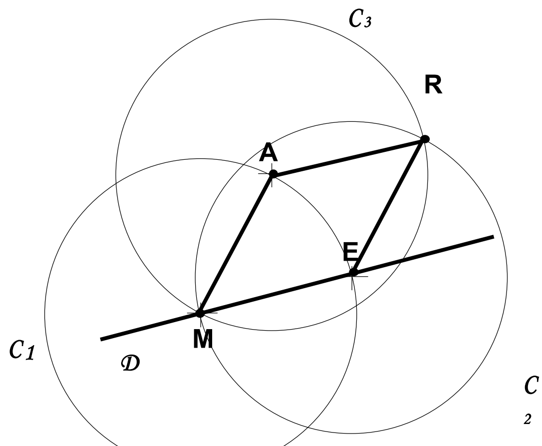


a) [AM] et [MI] sont deux côtés consécutifs du rectangle cherché. On va donc s'appuyer sur la propriété des côtés d'un rectangle. On trace la perpendiculaire à (AM) en A qui recoupe la droite 𝒟 en E. On construit la droite perpendiculaire à (AM) passant par M. Sur cette droite, on construit le point I de l'autre côté de 𝒟 par rapport à A, tel que MI = AE. Le quadrilatère AMIE a deux côtés opposés [AE] et [MI] parallèles et de même longueur, c'est donc un parallélogramme. Comme il possède un angle droit (AMI), c'est un rectangle.
On aurait pu aussi construire la perpendiculaire à (AE) qui passe par E et construire sur cette droite le point I tel que EI = AM.
On aurait pu aussi placer I grâce à la propriété des diagonales : elles sont de même longueur et se coupent en leur milieu, en plaçant le milieu de [ME] puis en construisant le symétrique de A par rapport à ce milieu.

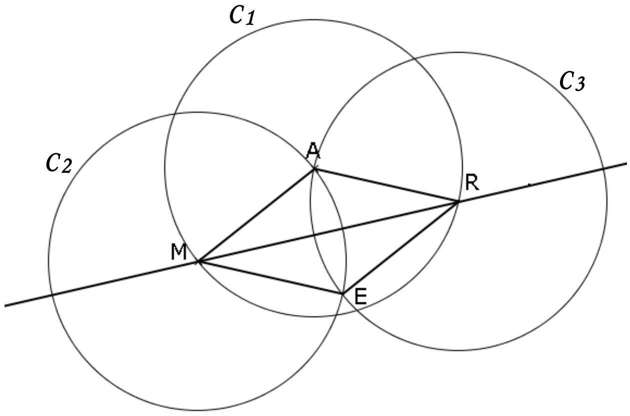


b) [AM] et [IE] sont les diagonales du rectangle cherché. On va construire un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu.
On trace le cercle de diamètre [AM]. Il recoupe la droite 𝒟 en E. On trace le diamètre passant par E qui coupe le cercle en I. Le quadrilatère AIME a deux diagonales de même longueur (diamètre du cercle) et ces dernières se coupent en leur milieu (le centre du cercle), c'est donc un rectangle (condition suffisante pour qu'un quadrilatère soit un rectangle).

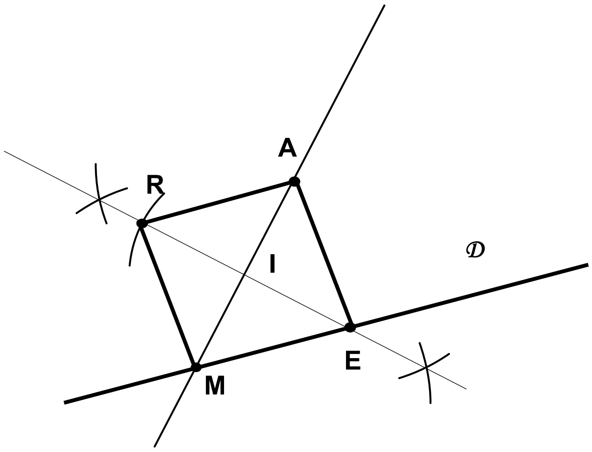
c) [AM] et [ME] sont deux côtés consécutifs du losange cherché. On va construire un quadrilatère dont les quatre côtés ont la même longueur. Etant donné la place disponible, deux solutions sont possibles.



- On trace le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre M et de rayon AM. Ce cercle coupe 𝒟 en deux points. On choisit un des deux points que l'on désigne par E. Le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre E et de rayon ME = AM coupe le cercle $\mathcal{C}_3$ de centre A et de rayon MA en R. AMER est un quadrilatère dont les quatre côtés sont de la même longueur (condition suffisante pour qu'un quadrilatère soit un losange).



- On trace le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A et de rayon AM. Ce cercle recoupe la droite en un point que l'on appelle R. On trace les cercle $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ de centres respectifs M et R de même rayon AM=AR, Ils se coupent en A et en un deuxième point que l'on appelle E. AMER est un quadrilatère dont les quatre côtés sont de la même longueur (condition suffisante pour qu'un quadrilatère soit un losange).



d) [AM] et [RE] sont les diagonales du rectangle cherché. On va construire un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu. On trace la médiatrice de [AM] qui coupe la droite $\mathcal{D}$ en E et le segment [AM] en son milieu I. On construit le point R sur cette médiatrice de telle sorte que I soit le milieu de [ER] (R est le symétrique de E par rapport à I). Le quadrilatère ARME a deux diagonales perpendiculaires se coupant en leur milieu (condition suffisante pour qu'un quadrilatère soit un losange).

Exercice 3 (4 points)

1. Soient M, T, et S les valeurs respectives de la maison, du terrain et de la somme d'argent.
La valeur T du terrain représente 25% de l'héritage soit 105 000 € : 0,25 x 420 000 = 105 000
La valeur M de la maison représente le tiers de l'héritage soit 140 000 € :
420 000 : 3 = 140 000.
La valeur S de la somme d'argent représente le reste soit 175 000 € :
420 000 – (105 000 + 140 000).

2. Un testament stipule que cet héritage doit être entièrement réparti entre trois personnes A, B et C, proportionnellement au nombre de parts qui leur sont respectivement attribuées : 28 ; 24 et 18.
Soient A, B, et C les parts de chacun :
Donc en tenant compte de la linéarité additive de la proportionnalité, on peut écrire :
$\frac{A}{28} = \frac{B}{24} = \frac{C}{18} = \frac{A+B+C}{70}$ or A + B + C = 420 000 donc $\frac{A}{28} = \frac{B}{24} = \frac{C}{18} = \frac{420\ 000}{70}$

Donc A= $\frac{420\ 000 \text{x} 28}{70}$ =168 000 ; B = $\frac{420\ 000 \text{x} 24}{70}$ = 144 000 ; C= $\frac{420\ 000 \text{x} 18}{70}$ =108 000.
A doit recevoir 168 00 €, B 144 000 € et C 108 000 €.

3. Puisque T = 105 000 €, M = 140 000 € et S = 175 000 €, la manière la plus appropriée de faire le partage est de répartir la somme d'argent entre celui qui obtient le terrain, celui qui obtient la maison et celui qui partira avec une somme d'argent.
On peut proposer que A obtienne le terrain et une somme de 63 000 €, que B obtienne la maison et une somme de 4 000 € et que C obtienne les 108 000 € restants.
Ou bien que A obtienne la maison et 24 000 €, B obtienne le terrain et de 39 000 €s, C obtenant les 108 000 €.

Exercice 4 (3 points)

1. 248, 284, 428, 482, 824 et 842.

2. Il y a deux nombres dont le chiffre des centaines (resp. des dizaines et des unités) est 2, deux nombres dont le chiffre des centaines (resp. des dizaines et des unités) est 4 et deux nombres dont le chiffre des centaines est 8 (resp. des dizaines et des unités). D'autre part un nombre à trois chiffres s'écrit cdu = cx100 + dx10 + u
Donc S = 2 x (2x100 + 2x10 + 2 + 4x100 + 4x10 + 4 + 8x100 + 8x10 + 8)

$$S = 2 \times \left[(2+4+8)\times 100 + (2+4+8)\times 10 + (2+4+8)\right]$$

S = 2 x t x (100 + 10 + 1)
S = t x 2 x 111
S = t x 222

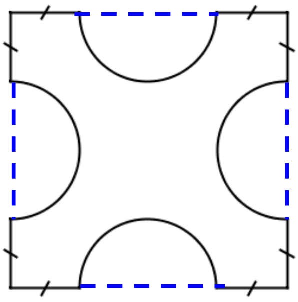
3. De la question précédente, on déduit que la somme de tous les nombres entiers que l'on peut écrire avec les chiffres 3, 7 et 9 et dont les chiffres sont différents est (3+7+9) x 222 = 19 x 222 = 4218.

Exercice 5 (4 points)

1. Le périmètre de la figure est la somme des longueurs des 8 segments et des 4 demi-cercles qui la composent. La somme de leurs longueurs des 4 demi-cercles est donc égale au double du périmètre d'un cercle de même rayon, 2.

Chacun des segments mesure 2 cm $\left(\frac{8-4}{2}\right)$.

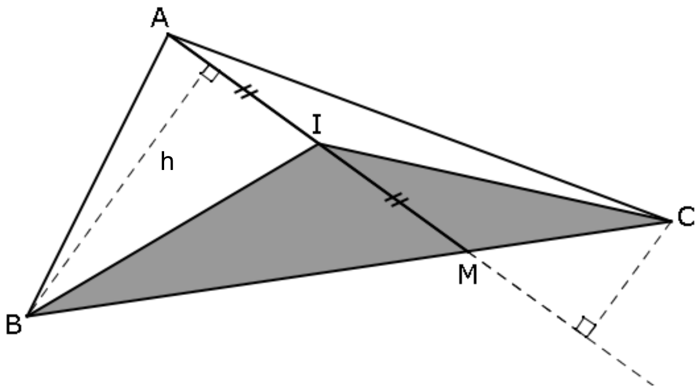
$P = 8 \times 2 + 2 \times (2 \times \pi \times 2) = 16 + 8\pi \simeq 41{,}12$



Pour calculer l'aire de la figure, on peut la compléter de la manière suivante :
L'aire de la figure est la différence entre l'aire du carré et l'aire de deux disques de rayon 2.

$\mathcal{A} = 8^2 - 2 \times (2^2 \times \pi) = 64 - 8\pi$ soit $\mathcal{A} \simeq 38{,}88$.

2. (BI) est la médiane du triangle AMB et (CI) est celle du triangle AMC. On en déduit que AI = IM.



Les aires des triangles ABI et IBM sont égales : en effet, les hauteurs issues du sommet B de ces deux triangles sont confondues et si h est leur mesure, l'aire de ABI vaut $\frac{h \times AI}{2}$ et celle de IBM vaut $\frac{h \times IM}{2}$. Comme IM=AI, on en déduit que les deux aires sont égales.
On démontrerait de la même manière que les aires des triangles ICA et ICM sont égales.

L'aire de la surface blanche est la somme des aires des triangles ABI et ICA et l'aire de la surface hachurée est la somme des aires des triangles IBM et ICM. D'après ce qui précède, les aires de ces deux surfaces sont égales.